MSE, 공학 기초수학

[연습문제 답안 이용 안내]

Chapter 11 연습문제 답안

11.1

(a) 다대일 대응이므로 함수이다.

(b) 일대일 대응이므로 함수이다.

(c) 일대다 대응이므로 함수가 아니다.

(d) 다대일 대응이므로 함수이다.

11.3

(a) 집합 X의 원소인 2에 대응하는 Y의 원소가 없기 때문에 함수가 아니다.

(b) 집합 X의 원소인 2에 Y의 원소가 2개 대응하기 때문에 함수가 아니다.

11.5

(a) 수평선 검사에 의하여 모든 수평선은 정의역 $\mathbb{R}$ 에서 $y = x + 1$과 한 번 만나므로 정의역 $\mathbb{R}$ 에서 $y = x + 1$은 단사 함수이다.

(b) 수평선 검사에 의하여 모든 수평선은 정의역 $[0, 5]$에서 $y = -\frac{1}{3}x - 1$과 한 번 이하로 만나므로 $y = -\frac{1}{3}x - 1$은 정의역 $[0, 5]$에서 단사 함수이다.

(c) 수평선 검사에 의하여 수평선 $y = 2$는 $y = x^2$과 두 번 만나므로 정의역 $\mathbb{R}$ 에서 $y = x^2$은 단사 함수가 아니다.

(d) 수평선 검사에 의하여 모든 수평선은 정의역 $[-3, -1]$에서 $y = x^2$과 한 번 이하로 만나므로 정의역 $[-3, -1]$에서 $y = x^2$은 단사 함수이다.

(e) 수평선 검사에 의하여 모든 수평선은 정의역 $(-\infty, 0]$에서 $y = -x^2$과 한 번 이하로 만나므로 정의역 $(-\infty, 0]$에서 $y = -x^2$은 단사 함수이다.

(f) 수평선 검사에 의하여 수평선 $y = -\frac{1}{2}$은 정의역 $[-2, 1]$에서 $y = -x^2$과 두 번 만나므로 정의역 $[-2, 1]$에서 $y = -x^2$은 단사 함수가 아니다.

11.7

(a) $g(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$

(b) $g(-2) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) = 4 - 6 = -2$

(c) $g(h) = h^2 + 3h$

(d) $g(1-h) = (1-h)^2 + 3(1-h) = 1 - 2h + h^2 + 3 - 3h = h^2 - 5h + 4$

(e) $g(2h-1) = (2h-1)^2 + 3(2h-1) = 4h^2 - 4h + 1 + 6h - 3 = 4h^2 + 2h - 2$

(f) $g(h^2) = (h^2)^2 + 3h^2 = h^4 + 3h^2$

11.9

(a) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x+3) = 2(2x+3) + 3 = 4x + 6 + 3 = 4x + 9$

(b) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-3x+1) = -3(-3x+1) + 1 = 9x - 3 + 1 = 9x - 2$

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2+4) = (x^2+4)^2 + 4 = x^4 + 8x^2 + 20$

(d) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x^2-1) = -(-x^2-1)^2 - 1 = -(x^2+1)^2 - 1$

(e) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\frac{1}{x+1}) = \dfrac{1}{\frac{1}{x+1} + 1} = \dfrac{1}{\frac{1+x+1}{x+1}} = \dfrac{x+1}{x+2}$

(f) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\frac{1}{x^2}) = \dfrac{1}{(\frac{1}{x^2})^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{x^4}} = x^4$

Chapter 12 연습문제 답안

12.1

(a) 단항식이다.

(b) 단항식이 아니다.

(c) 단항식이다.

(d) 단항식이다.

(e) 단항식이 아니다.

(f) 단항식이 아니다.

12.3

(a) 다항식이 아니다.

(b) 다항식이다. 차수 : 3

(c) 다항식이다. 차수 : 2

(d) 다항식이다. 차수 : 2

(e) 다항식이 아니다.

(f) 다항식이 아니다.

12.5

(a) 내림차순 : $A = x^3 - xy + y^2 + 2$, 오름차순 : $A = 2 + y^2 - xy + x^3$

(b) 내림차순 : $B = x^3 - 2x^2y + y^4 + 1$, 오름차순 : $B = 1 + y^4 - 2x^2y + x^3$

(c) 내림차순 : $C = x^4 + 3x^2y + 2xy^3$, 오름차순 : $C = 2xy^3 + 3x^2y + x^4$

(d) 내림차순 : $D = x^3y^3 - x^2 + xy^2 + 3$, 오름차순 : $D = 3 + xy^2 - x^2 + x^3y^3$

12.7

(a) $\dfrac{8x^5 - 6x^4 + 2x}{2x} = 4x^4 - 3x^3 + 1$

(b) $\dfrac{3x^3y^4 - 2x^2y^2 + 5x^3y}{xy} = 3x^2y^3 - 2xy + 5x^2$

(c) $\dfrac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{4x} = x^2 - \dfrac{3}{2}x + 2$

(d) $\dfrac{2x^3y^3 - 3x^3y^2 + 4x^4y^4}{2x^3y^2} = y - \dfrac{3}{2} + 2xy^2$

12.9

(a) x절편 : $x = -\frac{3}{2}$, y절편 : $y = 3$

(b) x절편 : $x = \frac{2}{3}$, y절편 : $y = -2$

(c) x절편 : $x = \frac{3}{4}$, y절편 : $y = 3$

(d) x절편 : $x = -\frac{4}{5}$, y절편 : $y = -4$

12.11

(a) $y = (x+2)^2$이므로 최솟값은 0이다.

(b) $y = (x+4)^2 - 15$이므로 최솟값은 -15이다.

(c) $y = 2(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}$ 이므로 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

(d) $y = 3(x+\frac{3}{2})^2 - \frac{31}{4}$ 이므로 최솟값은 $-\frac{31}{4}$ 이다.

12.13

(a) 공이 최고 높이에 도달하면 $v = 0$이다. 따라서 $0 = v_0 - gt$에서 $t = \frac{v_0}{g}$ 이다.

(b) (a)의 결과에 의하여 공의 최고 높이는

$$z = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g \cdot (\frac{v_0}{g})^2 = \frac{1}{2}\frac{(v_0)^2}{g}$$

이다.

[다른 풀이]

$z = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$을 표준형으로 표현하면

$$z = -\frac{g}{2}\left(t^2 - \frac{2v_0}{g}t\right) = -\frac{g}{2}\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

이므로 $t = \frac{v_0}{g}$ 일 때 공은 최고 높이 $\frac{v_0^2}{2g}$에 도달한다.

Chapter 13 연습문제 답안

13.1

(a) 방정식이다.

(b) 항등식이다.

(c) 항등식이다.

(d) 항등식이다.

(e) 방정식이다.

(f) 방정식이다.

(g) 항등식이다.

(h) 방정식이다.

13.3

(a) $a = -2, \quad b = -1$

(b) $a = \frac{4}{3}, \quad b = \frac{5}{2}$

(c) $a = -1, b = 4, c = 2$

(d) $a = 1, b = -4$

(e) $a = -2, b = \frac{5}{2}, c = 3$

(f) $a = 1, b = 2, c = 5$

13.5

(a) $4x - 6x = -3 - 1$이므로 $-2x = -4$에서 $x = 2$이다.

(b) $-2x - 3x = -3 - 1$이므로 $-5x = -4$에서 $x = \frac{4}{5}$ 이다.

(c) $6x - 2 = -12x + 6$ 이므로 $18x = 8$에서 $x = \frac{4}{9}$ 이다.

(d) $3x + 3 - 4x - 6 = 4x - 2$이므로 $-5x = 1$에서 $x = -\frac{1}{5}$ 이다.

(e) $3x - 10 = 5x - 2$이므로 $-2x = 8$에서 $x = -4$이다.

(f) $3x + 2 = 12x - 3$이므로 $-9x = -5$에서 $x = \frac{5}{9}$ 이다.

13.7

(a) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(b) $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

(c) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{10}}{2}$

(d) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$

(e) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{1}}{3}$ 에서 $x = \dfrac{2+1}{3} = 1$, $x = \dfrac{2-1}{3} = \dfrac{1}{3}$ 이다.

(f) $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{25}}{4}$ 에서 $x = \dfrac{11+5}{4} = 4$, $x = \dfrac{11-5}{4} = \dfrac{3}{2}$ 이다.

13.9

(a) $x = \dfrac{3}{2}$

(b) $x = \dfrac{14}{5}$

(c) $x = 1$

(d) $x = 2$

(e) $x = -9$

(f) $x = -\dfrac{3}{5}$

13.11

(a) $x = \dfrac{2}{7}$, $y = -\dfrac{1}{7}$

(b) $x = 5$, $y = 1$

(c) $x = -\dfrac{5}{2}$, $y = -\dfrac{13}{2}$

(d) $x = \dfrac{2}{7}$, $y = \dfrac{13}{7}$

(e) $x = \dfrac{7}{2}$, $y = \dfrac{9}{4}$

(f) $x = -\dfrac{16}{3}$, $y = -11$

Chapter 14 연습문제 답안

14.1

(a) $<$　(b) $<$　(c) $<$　(d) $>$

(e) $<$　(f) $<$　(g) $>$　(h) $>$

14.3

(a) $-1 \le x+y \le 4$　(b) $-5 \le x-y \le 0$

(c) $-6 \le 4x+2y \le 10$　(d) $1 \le -x+2y \le 8$

(e) $-19 \le 2x-5y \le -3$　(f) $-15 \le -3x-4y \le 2$

14.5

(a) $x < -8$　(b) $x > 2$　(c) $x > 5$

(d) $x < -\frac{1}{3}$　(e) $x \le -\frac{9}{8}$　(f) $x \ge -\frac{10}{13}$

14.7

(a) $-2 \le x \le -1$　(b) $0 < x \le 4$

(c) $x < -1$　(d) 해 없음

14.9

(a) $x = 1$　(b) 모든 실수

(c) $x = 5$를 제외한 모든 실수　(d) 해는 없다.

(e) $x = 4$　(f) $x = 6$을 제외한 모든 실수

14.11

$F = \frac{9}{5}C + 32$를 정리하면 $\frac{9}{5}C = F - 32$이므로 $C = \frac{5}{9}(F - 32)$이다.

$32 \le F \le 98$로부터 $0 \le F-32 \le 66$이고 $0 \le \frac{5}{9}(F-32) \le \frac{110}{3}$ 이므로

$0 \le C \le \frac{110}{3}$ 이다.

Chapter 15 연습문제 답안

15.1

(a) 유리함수

(b) 유리함수

(c) 무리함수

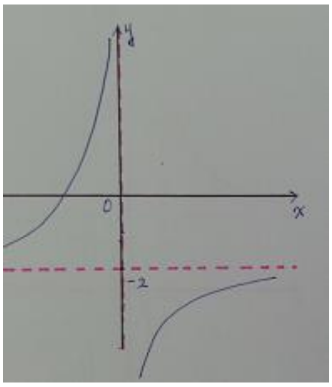
(d) 무리함수

(e) 유리함수

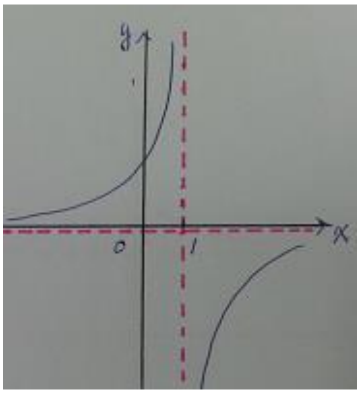
(f) 무리함수

15.3

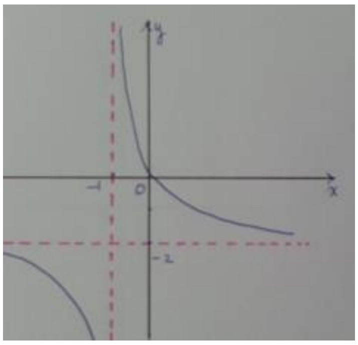
(a)



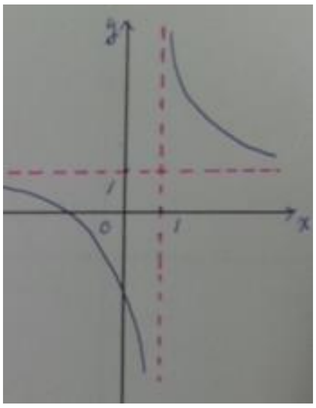
(b)



(c)



(d)



15.5

(a) $x=-8$

(b) $x=-\frac{9}{11}$

(c) $x = \frac{3}{7}$

(d) $x = \frac{5}{2}$ 또는 $x = -1$

(e) $x = 3$

(f) $x = -1$

15.7

(a) $\left\{x : x \geq \frac{1}{2}\right\}$

(b) $\left\{x : x \leq \frac{3}{2}\right\}$

(c) $\mathbb{R}$

(d) $\{x : x \geq 2$ 이거나 $x \leq 0\}$

15.9

(a) $x = 6$

(b) $x = 10$

(c) $x = 2$ 또는 $x = 5$

(d) 해 없음

(e) $x = 1$

(f) $x = -4$ 또는 $x = 5$

15.11

호스 B에서 분당 나오는 물의 양을 xL라 하면, 호스 A에서 분당 나오는 물의 양은 ($x-4$)L이다.

주어진 조건을 식으로 표현하면

$$\frac{600}{x} = \frac{600}{x-4} + 40$$

이므로 양변에 $x(x-4)$를 곱해서 정리하면

$$x^2 - 4x - 60 = (x+6)(x-10) = 0$$

이고, $x > 0$이므로 $x = 10$(L)이다.

따라서 호스 B만을 사용하여 물탱크를 채우는 데 걸리는 시간은 60분이다.

Chapter 16 연습문제 답안

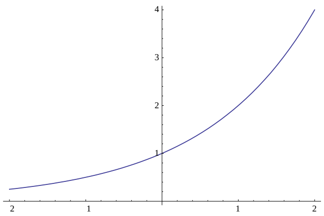
16.1

(a) $2^{\frac{7}{10}}$ (b) $5^{-\frac{7}{15}}$ (c) $3^{\frac{17}{12}}$

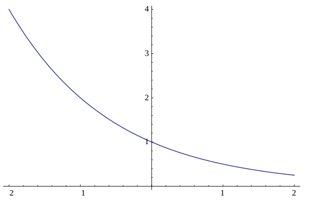
(d) $2^{-\frac{9}{2}}$ (e) $a^{\frac{37}{30}}$ (f) $a^{\frac{7}{6}}$

16.3

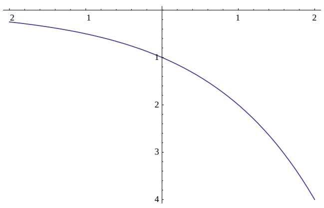
(a)



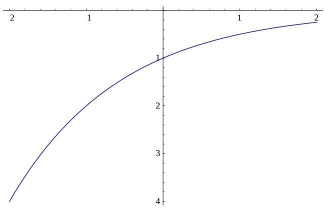
(b)



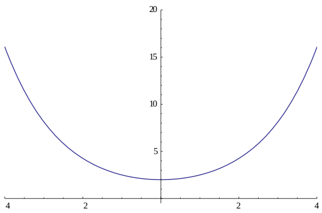
(c)



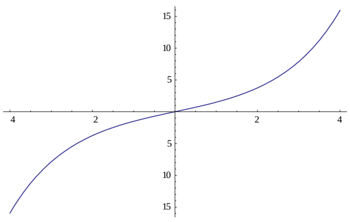
(d)



(e)



(f)



(그림 (e)에서 y축 절편은 2 임)

16.5

(a) $x = \frac{2}{3}$ (b) $x = -1$ 또는 $x = 2$

(c) $x = -1$또는 $x = 4$ (d) $x = -\frac{1}{4}$

(e) $x=1$또는 $x=2$ (f) $x=2$

16.7

(a) $\log_2 ab^3$ (b) $\log\frac{8}{9}$ (c) $\ln\frac{x^2}{x^2+1}$

(d) $\ln\frac{b^a}{c^b}$ (e) $\log_3\frac{5}{32}$ (f) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}$

(g) $\log_2 3\sqrt{6}$ (h) -1

16.9

(a) $\log_3 2 > \log_3 \sqrt[3]{4}$ (b) $\log_5 \sqrt[3]{25} < \log_5 \sqrt[4]{125}$

(c) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8} < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{16}$ (d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{0.1} < \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{0.001}$

16.11

(a) $x=-2+\log_2\frac{7}{4}$ (b) $x=\frac{1}{2}\left(1+\log_5\frac{3}{4}\right)$

(c) $x=\frac{1}{2\log 3-\log 2}$ (d) $x=\frac{-4\log 7}{5\log 2+3\log 7}$

(e) $x=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (f) $x=1,\ x=10000$

16.13

x일 후 방사능이 처음의 절반으로 줄어든다고 하면

$$\left(\frac{9}{10}\right)^x=\frac{1}{2}$$

이고, 양변에 상용로그를 취하면

$$x\log\frac{9}{10}=\log\frac{1}{2},\quad x(2\log 3-1)=-\log 2$$

이므로

$$x=\frac{\log 2}{1-2\log 3}\fallingdotseq 6.57$$

이다.

따라서 방사능이 처음의 절반으로 줄어드는 데 약 7일이 걸린다고 할 수 있다.

Chapter 17 연습문제 답안

17.1

(a) -288° (b) -200° (c) 165°

(d) 295° (e) $-\frac{13}{7}\pi$ (f) $-\frac{7}{9}\pi$

(g) $\frac{8}{5}\pi$ (h) $\frac{\pi}{4}$

17.3

육십분법	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
호도법	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

17.5

(a) $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(b) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$

(c) $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

(d) $\sin\theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\tan\theta = -\frac{\sqrt{11}}{5}$

17.7

(a) 3π (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$

(d) 10π (e) 4π (f) π

17.9

(a) $\frac{9}{16}$ (b) $\frac{25}{9}$

(c) $\frac{25}{16}$ (d) $\frac{16}{9}$

17.11

(a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (b) $\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(c) $2-\sqrt{3}$ (d) $-2+\sqrt{3}$

17.13

(a) 최솟값 : $-\sqrt{13}$, 최댓값 : $\sqrt{13}$ (b) 최솟값 : $-2\sqrt{2}$, 최댓값 : $2\sqrt{2}$

(c) 최솟값 : $-\sqrt{26}$, 최댓값 : $\sqrt{26}$ (d) 최솟값 : $-3\sqrt{2}$, 최댓값 : $3\sqrt{2}$

17.15

3.5GHz

Chapter 18 연습문제 답안

18.1

(a) x가 1의 왼쪽에서부터 1에 가까워질 때 함수의 그래프는 1로 접근하므로

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

이다.

(b) x가 1의 오른쪽에서부터 1에 가까워질 때 함수의 그래프는 1로 접근하므로

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

이다.

(c) x가 2의 왼쪽에서부터 2에 가까워질 때 함수의 그래프는 0으로 접근하므로

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$$

이다.

(d) x가 2의 오른쪽에서부터 2에 가까워질 때 함수의 그래프는 2로 접근하므로

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$$

이다.

18.3

(a) $f(x)$의 좌극한과 우극한은 각각

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

이고 $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$이므로 $\lim_{x \to 0} f(x)$는 존재하지 않는다.

(b) $g(x)$의 좌극한과 우극한은 각각

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x^2) = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

이고 $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x)$이므로 $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$이다.

18.5

(a) $\lim_{x \to 1} (x^2 + 2x - 4) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 = -1$

(b) $\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 1 + 3 = 4$

(c) $\lim_{x \to -2} \sqrt{x+4} = \sqrt{-2+4} = \sqrt{2}$

(d) $\lim_{x \to 2} \left(x + \frac{2}{x}\right) = 2 + \frac{2}{2} = 3$

(e) $\lim_{x \to 4} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4+2}{4+1} = \frac{6}{5}$

(f) $\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{-3+3}{-3+2} = \frac{0}{-1} = 0$

18.7

(a) $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$= \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$

(b) $\lim_{x \to 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5} = \lim_{x \to 25} \frac{(x-25)(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \lim_{x \to 25} \frac{(x-25)(\sqrt{x}+5)}{x-25}$

$= \lim_{x \to 25} (\sqrt{x} + 5) = 5 + 5 = 10$

(c) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

(d) $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{x-3}$

$= \lim_{x \to 3} (\sqrt{x} + \sqrt{3}) = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

18.9

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{x} = 9$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{x} = 5$

(d) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 4x}{6x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(e) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 6x} = \frac{1}{6}$

(f) $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\tan 5x} = \frac{3}{5}$

18.11

(a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 연속이다.

(b) $g(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 연속이 아니다.

(c) $\lim_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$ 이므로 함수 $h(x)$는 $x = 0$에서 연속이다.

(d) $\lim_{x\to 0} k(x) = 2 \neq 1 = k(0)$ 이므로 함수 $k(x)$는 $x = 0$에서 연속이 아니다.

18.13

(a) $\lim_{m_1\to m_2} a = \lim_{m_1\to m_2}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)g = 0$ 이다.

$m_1 \to m_2$인 경우 즉 두 물체의 질량이 비슷한 경우 a가 0에 가까이 간다는 것은 평형상태에 가깝다는 것을 의미한다.

(b) $\lim_{m_2\to \infty} a = \lim_{m_2\to\infty}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)g = g$ 이다.

$m_2 \to \infty$ 인 경우 즉 m_2의 값이 m_1에 비하여 매우 큰 경우 $a = g$가 된다는 것은 두 물체가 자유 낙하와 비슷한 가속도를 갖는다는 것을 의미한다.

Chapter 19 연습문제 답안

19.1

(a) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{(8+3)-(0+3)}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

(b) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(-1)-f(1)}{-1-1} = \dfrac{(2+3)-(2+3)}{-2} = \dfrac{0}{-2} = 0$

(c) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \dfrac{(18+3)-(2+3)}{4} = \dfrac{16}{4} = 4$

19.3

(a) $f_1{}'(x) = 15x^{15-1} = 15x^{14}$

(b) $f_2{}'(x) = -12x^{-12-1} = -12x^{-13}$

(c) $g_1(x)$가 상수함수이므로 $g_1{}'(x) = 0$이다.

(d) $g_2(x)$가 상수함수이므로 $g_2{}'(x) = 0$이다.

(e) $h_1(x) = x^{-3}$이므로 $h_1{}'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$이다.

(f) $h_2(x) = x^{-1.1}$이므로 $h_2{}'(x) = -1.1x^{-1.1-1} = -1.1x^{-2.1}$이다.

(g) $k_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$이므로 $k_1{}'(x) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$이다.

(h) $k_2(x) = x^{\frac{1}{4}}$이므로 $k_2{}'(x) = \dfrac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$이다.

19.5

(a) $y' = (x+1)'(x+4) + (x+1)(x+4)'$

$= 1 \cdot (x+4) + (x+1) \cdot 1$

$= 2x + 5$

(b) $y' = (x-5)'(x-3) + (x-5)(x-3)'$

$= 1 \cdot (x-3) + (x-5) \cdot 1$

$= 2x - 8$

(c) $y' = (2x-1)'(3x+2) + (2x-1)(3x+2)'$

$= 2 \cdot (3x+2) + (2x-1) \cdot 3$

$= 12x + 1$

(d) $y' = (4x+3)'(5x-1) + (4x+3)(5x-1)'$

$= 4 \cdot (5x-1) + (4x+3) \cdot 5$

$= 40x + 11$

(e) $y' = (x^3)'(x+4) + x^3(x+4)'$

$= 3x^2(x+4) + x^3 \cdot 1$

$= 4x^3 + 12x^2$

(f) $y' = (x^4)'(3x-1) + x^4(3x-1)'$

$= 4x^3 \cdot (3x-1) + x^4 \cdot 3$

$= 15x^4 - 4x^3$

(g) $y' = (x^2+1)'(3x+4) + (x^2+1)(3x+4)'$

$= 2x(3x+4) + (x^2+1) \cdot 3$

$= 9x^2 + 8x + 3$

(h) $y' = (x^3-1)'(x^2+3) + (x^3-1)(x^2+3)'$

$= 3x^2(x^2+3) + (x^3-1) \cdot 2x$

$= 5x^2 + 9x^2 - 2x$

19.7

(a) $y' = (\frac{1}{4}x^3)' - (\sin x)' = \frac{1}{4} \cdot 3x^2 - \cos x = \frac{3}{4}x^2 - \cos x$

(b) $y' = (3\sin x)' + (4\cos x)' = 3\cos x + 4(-\sin x) = 3\cos x - 4\sin x$

(c) $y' = (x^2)'\sin x + x^2(\sin x)' = 2x\sin x + x^2\cos x$

(d) $y' = (\frac{1}{3}x^4)'\tan x + \frac{1}{3}x^4(\tan x)' = \frac{4}{3}x^3\tan x + \frac{1}{3}x^4\sec^2 x$

(e) $y' = (\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x$

(f) $y' = (\sin x)'\tan x + \sin x(\tan x)' = \cos x\tan x + \sin x\sec^2 x$

19.9

(a) $f_1'(x) = 5(x+2)^4(x+2)' = 5(x+2)^4 \cdot 1 = 5(x+2)^4$

(b) $f_2{}'(x) = 4(3x-1)^3(3x-1)' = 4(3x-1)^3 \cdot 3 = 12(3x-1)^3$

(c) $g_1{}'(x) = 2(x^2-1)^1(x^2-1)' = 2(x^2-1) \cdot 2x = 4x(x^2-1)$

(d) $g_2{}'(x) = 6(x^3+2)^5(x^3+2)' = 6(x^3+2)^5 \cdot 3x^2 = 18x^2(x^3+2)^5$

(e) $h_1{}'(x) = 7(x^3-2x-1)^6(x^3-2x-1)' = 7(x^3-2x-1)^6(3x^2-2)$

(f) $h_2{}'(x) = 3(-2x^5+x^2)^2(-2x^5+x^2)' = 3(-2x^5+x^2)^2(-10x^4+2x)$

19.11

(a) $f_1{}'(x) = \cos(3x+7)(3x+7)' = \cos(3x+7) \cdot 3 = 3\cos(3x+7)$

(b) $f_2{}'(x) = \cos(4-5x)(4-5x)' = \cos(4-5x) \cdot (-5) = -5\cos(4-5x)$

(c) $g_1{}'(x) = -\sin(x^2+x)(x^2+x)' = -\sin(x^2+x) \cdot (2x+1) = -(2x+1)\sin(x^2+x)$

(d) $g_2{}'(x) = -\sin(x-x^3)(x-x^3)' = -\sin(x-x^3) \cdot (1-3x^2) = -(1-3x^2)\sin(x-x^3)$

(e) $h_1{}'(x) = \sec^2(3x^3-1)(3x^3-1)' = \sec^2(3x^3-1) \cdot 9x^2 = 9x^2\sec^2(3x^3-1)$

(f) $h_2{}'(x) = \sec^2(1-x-x^2)(1-x-x^2)'$

$= \sec^2(1-x-x^2) \cdot (-1-2x)$

$= (-1-2x)\sec^2(1-x-x^2)$

Chapter 20 연습문제 답안

20.1

(a) $F_1'(x) = 4x^3 \neq f(x)$이므로 $F_1(x)$는 $f(x)$의 원시함수가 아니다.

(b) $F_2'(x) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2 \neq f(x)$이므로 $F_2(x)$는 $f(x)$의 원시함수가 아니다.

(c) $F_3'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3 = f(x)$이므로 $F_3(x)$는 $f(x)$의 원시함수이다.

(d) $F_4'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3 = f(x)$이므로 $F_4(x)$는 $f(x)$의 원시함수이다.

(e) $F_5'(x) = 3 \cdot 2x^1 = 6x \neq f(x)$이므로 $F_5(x)$는 $f(x)$의 원시함수가 아니다.

(f) $F_6'(x) = \frac{1}{3} \cdot 2x^1 = \frac{2}{3}x \neq f(x)$이므로 $F_6(x)$는 $f(x)$의 원시함수가 아니다.

20.3

(a) $\int (x^5 + 3x)\,dx = \int x^5\,dx + 3\int x\,dx = \frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{2}x^2 + C$

(b) $\int (4x^6 + 5x^4)\,dx = 4\int x^6\,dx + 5\int x^4\,dx = \frac{4}{7}x^7 + x^5 + C$

(c) $\int (2x^2 - 3)\,dx = 2\int x^2\,dx - 3\int 1\,dx = \frac{2}{3}x^3 - 3x + C$

(d) $\int (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \int x^3\,dx - 3\int x^2\,dx + 2\int x\,dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + C$

(e) $\int (3x + \frac{2}{x})\,dx = 3\int x\,dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{3}{2}x^2 + 2\ln|x| + C$

(f) $\int (2x - \frac{3}{x})\,dx = 2\int x\,dx - 3\int \frac{1}{x}\,dx = x^2 - 3\ln|x| + C$

(g) $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int x^{-2}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{x} + C$

(h) $\int (\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4})\,dx = \int x^{-3}\,dx - \int x^{-4}\,dx = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + C$

20.5

(a) $g(x) = x + 2$라 하면 $g'(x) = 1dx = dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int (x+2)^4\,dx = \int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{5}(x+2)^5 + C$$

이다.

(b) $g(x) = x - 5$라 하면 $g'(x) = 1\,dx = dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int (x-5)^2\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}(x-5)^3 + C$$

이다.

(c) $g(x) = x + 4$라 하면 $g'(x) = 1\,dx = dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \sqrt{x+4}\;dx = \int \sqrt{t}\;dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} + C$$

이다.

(d) $g(x) = x - 7$이라 하면 $g'(x) = 1\,dx = dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \sqrt[3]{x-7}\;dx = \int \sqrt[3]{t}\;dt = \int t^{\frac{1}{3}}\,dt = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}(x-7)^{\frac{4}{3}} + C$$

이다.

(e) $g(x) = x^3 + 4$라 하면 $g'(x) = 3x^2\,dx = dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int 3x^2(x^3+4)^5\;dx = \int t^5\,dt = \frac{1}{6}t^6 + C = \frac{1}{6}(x^3+4)^6 + C$$

이다.

(f) $g(x) = x^4 - 1$이라 하면 $g'(x) = 4x^3\,dx = dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int 4x^3(x^4-1)^4\,dx = \int t^4\,dt = \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{5}(x^4-1)^5 + C$$

이다.

(g) $g(x) = x^2 + 2$이라 하면 $g'(x) = 2x\,dx = dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int 2x\sqrt{x^2+2}\;dx = \int \sqrt{t}\;dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}} + C$$

이다.

(h) $g(x) = x^4 + 10$이라 하면 $g'(x) = 4x^3\,dx = dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int 4x^3\sqrt[4]{x^4+10}\;dx = \int \sqrt[4]{t}\;dt = \int t^{\frac{1}{4}}\,dt = \frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{5}(x^4+10)^{\frac{5}{4}} + C$$

이다.

20.7

(a) $g(x) = 2x + 1$이라 하면 $g'(x) = 2\ dx = dt$이므로 $dx = \frac{1}{2}\,dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \frac{1}{(2x+1)^4}\,dx = \int \frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^{-4}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-3}t^{-3} + C = -\frac{1}{6(2x+1)^3} + C$$

이다.

(b) $g(x) = 3x + 7$이라 하면 $g'(x) = 3\ dx = dt$이므로 $dx = \frac{1}{3}\,dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \frac{1}{(3x+7)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^{-2}\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-1}t^{-1} + C = -\frac{1}{3(3x+7)} + C$$

이다.

(c) $g(x) = x^2 + 1$이라 하면 $g'(x) = 2x\ dx = dt$이므로 $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^4}\,dx = \int \frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^{-4}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-3}t^{-3} + C = -\frac{1}{6(x^2+1)^3} + C$$

이다.

(d) $g(x) = 3x + 9$라 하면 $g'(x) = 3\ dx = dt$이므로 $dx = \frac{1}{3}\,dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x+9}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{3}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}(3x+9)^{\frac{1}{2}} + C$$

이다.

(e) $g(x) = 2x - 1$이라 하면 $g'(x) = 2\ dx = dt$이므로 $3\,dx = \frac{3}{2}\,dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \frac{3}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{3}{2}dt = \frac{3}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{3}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = 3(2x-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

이다.

(f) $g(x) = x^2 + 4$라 하면 $g'(x) = 2x\ dx = dt$이므로 $4x\,dx = 2\,dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot 2\,dt = 2\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = 2\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = 4(x^2+4)^{\frac{1}{2}} + C$$

이다.

20.9

(a) $g(x) = \frac{1}{5}x$라 하면 $g'(x) = \frac{1}{5}\,dx = dt$이므로 $dx = 5\,dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \cos\frac{1}{5}x\,dx = \int \cos t \cdot 5dt = 5\sin t + C = 5\sin\frac{1}{5}x + C$$

이다.

(b) $g(x) = 5x$라 하면 $g'(x) = 5\,dx = dt$이므로 $dx = \frac{1}{5}dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \sin 5x\,dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}(-\cos t) + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$$

이다.

(c) $g(x) = 3-2x$라 하면 $g'(x) = -2\,dx = dt$이므로 $dx = -\frac{1}{2}dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \cos(3-2x)\,dx = \int \cos t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}\sin t + C = -\frac{1}{2}\sin(3-2x) + C$$

이다.

(d) $g(x) = 4x-1$라 하면 $g'(x) = 4\,dx = dt$이므로 $dx = \frac{1}{4}dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \sin(4x-1)\,dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}(-\cos t) + C = -\frac{1}{4}\cos(4x-1) + C$$

이다.

(e) $g(x) = \frac{2}{3}x$라 하면 $g'(x) = \frac{2}{3}dx = dt$이므로 $dx = \frac{3}{2}dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \sec^2\frac{2}{3}x\,dx = \int \sec^2 t \cdot \frac{3}{2}dt = \frac{3}{2}\tan t + C = \frac{3}{2}\tan\frac{2}{3}x + C$$

이다.

(f) $g(x) = 5x+3$이라 하면 $g'(x) = 5\,dx = dt$이므로 $dx = \frac{1}{5}dt$이다. 치환적분법에 의하여

$$\int \sec^2(5x+3)\,dx = \int \sec^2 t \cdot \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}\tan t + C = \frac{1}{5}\tan(5x+3) + C$$

이다.

20.11

0.5m에서 1m로 0.5m를 늘리는 데 40N의 힘이 들었으므로, 후크의 법칙에 의하여 $40 = k \cdot 0.5$에서 $k = \frac{40}{0.5} = 80$이다. 따라서 구하는 일의 양은 다음과 같다.

$$W = \int_1^2 kx\,dx = \int_1^2 80x\,dx = 80 \cdot \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 = 40x^2\Big|_1^2 = 120 \quad \text{(J)}$$