1장 연습문제 답안

[Section 1.1 연습문제]

1. 일차방정식이다.

2. 일차방정식이 아니다.(xz항)

3. 일차방정식이다.

4. 일차방정식이 아니다.(x^{-2}항)

5. 일차방정식이 아니다.(xyz항)

6. 일차방정식이다.

7. $x-2y=5$

8. $x-2y=-5$

9. $2x-y=-6$

10. $2x-y=-6$

11. $-x+2y=-5$

12. $x=\frac{3}{5}, y=\frac{1}{5}$ / 그림 생략

13. 해가없다. / 그림 생략

14. $x=-1, y=4$ / 그림 생략

15. $x=\frac{10}{13}, y=\frac{1}{13}$ / 그림 생략

16. $x=1, y=0$ / 그림 생략

17.

(1) k개의 직선이 공통점을 갖지 않는다.

(2) k개의 직선이 유일한 공통점을 갖는다.

(3) k개의 직선이 하나의 직선으로 포개어진다.

[Section 1.2 연습문제]

1. $\{(x, 5-x) | x > 5, x \in N\}$

2. $\{(10-2y, y) | y = 1,2,3,4\}$

3. (2,4)

4. (5,3)

5. (2,3)

6. (-3,1)

7. (1,4)

8. (-5,-2)

9. (-3,2)

10. (7,4)

11. (3,1)

12. (1,-2)

13. (7,-1)

14. (6,5)

15. (6,-2)

16. (-3,3)

17. (4,-2)

18. (2,-1)

19. (1.2, 0.2)

20. 해가 없음

21. (1,2,3)

22. $x = y - 2z + 5, y = y, z = z$

2장 연습문제 답안

[Section 2.1 연습문제]

1. $a_{12}=-2,\ a_{22}=-3,\ a_{23}=4$

2. $b_{11}=2,\ b_{31}=5$

3. $c_{13}=2,\ c_{31}=7,\ c_{33}=-1$

4. $6,3,-1$

5. $a=4, b=-1, c=\dfrac{11}{2}, d=\dfrac{1}{2}$

6. $a=0, b=2, c=1, d=2$

7. $\begin{bmatrix} -2 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & 11 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ -12 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 14 & -19 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

10. $AB=\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -6 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

11. $x=0,\ y=-3,\ z=-1,\ w=-1$

12. $x=-1,\ y=-5,\ z=1,\ w=2$

13. AB의 $(2,3)$-성분 $24+15+20=59$

14. BA의 $(2,3)$-성분 $0+4+27=31$

15. AB의 첫 번째 행 $[67\ 41\ 41]$

16. AB의 세 번째 열 $\begin{bmatrix} 41 \\ 59 \\ 57 \end{bmatrix}$

[Section 2.2 연습문제]

1. $A+B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}=B+A$

2. $A+B+C=\begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 8 & 5 & 10 \end{bmatrix}=C+B+A$

3. $(-2+3)C=\begin{bmatrix} -4 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

4. $-2B+2C=\begin{bmatrix} -12 & -12 & 0 \\ -2 & 10 & -10 \end{bmatrix}$

5. $A(BC)=(AB)C=\begin{bmatrix} -2 & 34 \\ 24 & -9 \end{bmatrix}$

6. $a(BC)=(aB)C=B(aC)=\begin{bmatrix} 20 & 2 \\ -8 & 22 \end{bmatrix}$

7. $(ab)C=a(bC)=6C=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 18 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

8. $A(B+C^T)=AB+AC^T=\begin{bmatrix} 3 & -6 & 21 \\ -1 & 16 & 0 \end{bmatrix}$

9. $AB=AC=\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$

10. $A^2-2A=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

11. $3A^3-2A^2+5A-4I_2=\begin{bmatrix} -24 & -30 \\ 60 & 36 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

13. 증명 생략

[Section 2.3 연습문제]

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

3. 비가역

4. 비가역

5. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{10} & -\frac{6}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

6. 비가역

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{17}{7} & -2 & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{16}{7} & -1 & \frac{5}{7} & -\frac{11}{7} \\ \frac{11}{7} & -1 & \frac{3}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{9}{7} & 1 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$

10. 비가역

11. $A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$ $a \neq 0$

12. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. $E_1 = E_{12}(2), E_2 = E_2(1/3)$

17. $A^{-1} = E_3(1/3)E_{12}(2)$

18. 증명 생략

19. 증명 생략

20. 증명 생략

21. 증명 생략

22. 증명 생략

23. $\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ -\frac{1}{k^4} & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$

24. $E_{12}(a)E_{13}(b)E_{23}(c)$

[Section 2.4 연습문제]

1. 비가역

2. 가역

3.가역

4. 비가역

5. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \\ 4 & 10 & 10 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -12 & -1 & 6 \\ 6 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

7. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -12 & -4 & -4 \\ 4 & -16 & -8 \end{bmatrix}$

12. 증명 생략

13. 증명 생략

14. $\det\begin{bmatrix} x-1 & x^2 & x^4 \\ 0 & x+2 & x^3 \\ 0 & 0 & x-4 \end{bmatrix}=(x-1)(x+2)(x-4)\neq 0$

15. 닐포텐시: 3, $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

16. 닐포텐시: 3, $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. 증명 생략

18. 증명 생략

19. 증명 생략

20. $D^k = \mathrm{diag}(a_{11}^k, a_{22}^k, \ldots, a_{nn}^k) = \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{bmatrix}$

21. 단위행렬 I_n과 행동치 이어야 하므로 주대각선 성분이 모두 영이 아니어야 한다. 또한 그때의 역행렬은 주대각선 성분의 역수임을 알 수 있다. 즉,

$$D^{-1} = \mathrm{diag}(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1}) = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

22. $P_1^{-1} = [1]$

23. $P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

24. $P_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

25. $P_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

28. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3장 연습문제 답안

[Section 3.1 연습문제]

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

4. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 \quad\;\; &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 3 \\ x_1 \quad + 2x_3 - x_4 &= -15 \end{aligned}$

6.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$REF, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$RREF (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

8. $x = 1, y = 2, z = -2$

9. $x = 3, y = -2, z = 4$

10. $x = -5-2t, y = t, z = -7-3t, w = 4+t$

11. $x = (15/22)t, y = (35/22)t, z = -(29/11)t, w = t$

12. $x = -5-2t, y = 2+3t, z = 3+2t, w = t$

13. $x = -13t, y = 10t, z = 3t, w = t$

14. $x = 1, y = 3, z = 1$

15. $w = 1, x = -13, y = 10, z = 3$

16. $x_1 = 2z-3y-1/4, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = -1/2z, x_5 = 1/8, x_6 = 1/3$

17. $a = 3$

18. $a \neq 3$

19. $a = 2$

20. $c = 5a-2b$

21. $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{23}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 51 \\ 0 & 1 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 22 \\ 0 & 0 & 51 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3}(1/55)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 22 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[Section 3.2 연습문제]

1. 비자명한 해를 갖는다.

2. 비자명한 해를 갖는다.

3. 자명한 해 만을 갖는다.

4. 자명한 해 만을 갖는다.

5. 자명한 해 만을 갖는다.

6. 비자명한 해를 갖는다.

7. 자명한 해 만을 갖는다.

8. 비자명한 해를 갖는다.

9. $t\begin{bmatrix}5\\6\\1\end{bmatrix}$

10. $t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

11. 계수행렬이 비가역이기 위한 조건은 $\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$

12. 증명 생략

13. $x_1=1, x_2=0, x_3=1$

14. (83,-26,-10)

15. 계수행렬이 가역이므로 자명한해만을 갖는다.

16. $(2,1)$

17. $(-2,1,-3)$

18. 가우스소거법에 의하면 $n+(n-1)+\cdots+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$

[Section 3.3 연습문제]

1. $E = E_{12}, F = E_{13}(2), G = E_{23}(-1)$

2. $\mathrm{x} = (6,5,3)$

3. $X = (5,3,1)$

4. $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$

5. $A^{-1} = E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.21863 & -0.41347 & 0.88388 \\ 0.59783 & -0.65914 & -0.45621 \\ 0.77123 & 0.62815 & 0.10308 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17.052 & 0 & 0 \\ 0 & 0.36934 & 0 \\ 0 & 0 & 0.31757 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.21863 & 0.59783 & 0.77123 \\ 0.41347 & 0.65914 & -0.62815 \\ 0.88388 & -0.45621 & 0.10308 \end{pmatrix}$$

8. $(2,-1,3)$

9. $(4,2,3)$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

12. 3행은 1행과 2행에 의하여 생성된다.

13. $a = 4, b = 5$

14. $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = 1$

15. $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = 1$

[Section 3.4 연습문제]

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 300 \\ x_2 - x_3 = 100 \\ x_4 - x_3 = 500 \\ x_4 - x_1 = 100 \end{cases}$

2. $i_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}$, $i_2 = 0\mathrm{A}$, $i_3 = 0\mathrm{A}$, $i_4 = \frac{1}{2}\mathrm{A}$, $i_5 = \frac{1}{2}\mathrm{A}$, $i_6 = \frac{1}{2}\mathrm{A}$

3. $i_1 = 3\mathrm{A}$, $i_2 = 2\mathrm{A}$, $i_3 = 1\mathrm{A}$

4. $i_1 = \frac{13}{5}\mathrm{A}$, $i_2 = -\frac{2}{5}\mathrm{A}$, $i_3 = \frac{11}{5}\mathrm{A}$

5. $i_1 = \frac{7}{22}\mathrm{A}$, $i_2 = -\frac{1}{22}\mathrm{A}$, $i_3 = -\frac{8}{22}\mathrm{A}$

6. $Al_2(SO_4)_3 + 3Ba(NO_3)_2 \rightarrow 2Al(NO_3)_3 + 3BaSO_4$

7. $a = -\frac{5}{3}, b = \frac{29}{2}, c = -\frac{227}{6}, d = 33$

4장 연습문제 답안

[Section 4.1 연습문제]

1. $0+1+2+1+1=5$

2. $0+0+2+3+2=7$

3. $0+1+2+1+0=4$

4. $0+0+0+1+3=4$

5. 짝치환

6. 홀치환

7. 짝치환

8. 홀치환

9. 짝치환

10. 짝치환

11. 7

12. 30

13. -30

14. -82

15. 2

16. 4

17. -30

18. -2

19. $|B|=4$

20. -8

21. $|D|=4$

22. $|E|=-4$

23. $x=1 \text{ or } 2$

24. $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$

25. 증명 생략

26. 증명 생략

27. 증명 생략

28. $|A^2|=16$

29. $|A^{-1}|=-\dfrac{1}{4}$

30. $|2A|=-2^{n+2}$

31. $|(2A)^{-1}|=-\dfrac{1}{2^{n+2}}$

32. $|AA^T| = 16$

33. $|AB| = -12$

34. $|(AB)^{-1}| = \frac{1}{-12}$

35. $|B^{-1}A| = \frac{-4}{3}$

36. $|A^2B(3A^T)| = 3^{n+1}(-4)$

37. $|A|^2 = 8$이므로 $|A| = \pm 2\sqrt{2}$

38. 증명 생략

39. 증명 생략

40. 증명 생략

41. 증명 생략

[Section 4.2 연습문제]

1. $\begin{bmatrix} -7 & 8 & -13 \\ 5 & 4 & -15 \\ -4 & -10 & 12 \end{bmatrix}$

2. -34

3. 증명 생략

4. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & \frac{25}{39} & -\frac{14}{39} & \frac{7}{39} \\ -\frac{3}{13} & \frac{3}{13} & \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{39} & \frac{4}{39} & -\frac{2}{39} \end{bmatrix}$

8. $x=0, y=0, z=0$

9. $x=y=z=w=0$

10. $x=-\frac{11}{47}$ $\quad y=-\frac{100}{47}$

11. $x=-2,\ y=0,\ z=1$

12. $x=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{19}{22},\ z=\frac{2}{11}$

13. $x=1,\ y=-1,\ z=0,\ w=2$

14. $x_1=34,\ x_2=22,\ x_3=-\frac{16}{3},\ x_4=-\frac{10}{3},\ x_5=-7$

15. $z=-\frac{1}{11}$

16. $z=-1$

17. $a=\frac{4}{11}$

18. 증명 생략

19. 증명 생략

20. 증명 생략

21. 증명 생략

[Section 4.3 연습문제]

1. $P(x) = 1 + \frac{13}{6}x - \frac{1}{6}x^3$

2. $-3x + y + 4 = 0$

3. $2x + y - 1 = 0$

4. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

5. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$

6. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y = 0$

7. $x + 2y + z = 0$

8. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 2 = 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2^2$

9. 증명 생략

10. 증명 생략

11. $a_n = -\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{1}{5}4^n$

12. $D_n + D_{n-1}$

5장 연습문제 답안

[Section 5.1 연습문제]

1~4. 그림 생략

5~8. 그림 생략

9. $\overrightarrow{PQ} = (-4, -2)$

10. $\overrightarrow{PQ} = (-5, -4, 2)$

11. $Q(2, 3)$

12. $P(-2, -2, -1)$

13. $(-8, 10, -5)$

14. $(-2, 18, -12)$

15. $(16, -4, 5)$

16. $(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$

17. $(\sqrt{\frac{2}{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$

18. $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

19. $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

20.

(1) $-2e_1 + e_2$

(2) $\sqrt{2}\, e_1 + 2e_2$

(3) $\frac{1}{2} e_1 + e_2 - e_3$

(4) $e_1 + e_2 - e_3$

21. $\| \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \| = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}$

22. 0

23. 증명 생략

24. $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

25. $\mathrm{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

26. $\mathrm{z} = \mathrm{i} + 2\mathrm{j} - 3\mathrm{k}$

27. $\mathrm{w} = -\sqrt{2}\,\mathrm{j} + 5\mathrm{k}$

[Section 5.2 연습문제]

1. $\mathrm{u} \cdot v = -4$

2. $\mathrm{x} \cdot y = 4$

3. $\mathrm{a} \cdot b = 0$

4. $\mathrm{p} \cdot q = 0$

5. $\cos\theta = \dfrac{6}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

6. $\cos\theta = \dfrac{-2}{\dfrac{2\sqrt{5}}{2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

7. $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$

8. $\cos\theta = \dfrac{-23}{\sqrt{29}\sqrt{41}} = \dfrac{-23}{\sqrt{1189}}$

9. 5

10. 0

11. 0

12. 0

13. x_1과 수직인 벡터는 x_5, x_7이고, x_2와 수직인 벡터는 x_8, x_3와 수직인 벡터는 x_7, x_6과 수직인 벡터는 x_7이다. 특히 영벡터인 x_4는 모든 벡터와 수직이다.

14. x_1과 평행인 x_3, x_6이다. 또 영벡터는 모든 벡터와 평행이므로 x_4는 모든 벡터와 평행이다.

15. $\cos\alpha = \dfrac{2}{\| \sqrt{20} \|}$, $\cos\beta = \dfrac{0}{\| \sqrt{20} \|} = 0$, $\cos\gamma = \dfrac{-4}{\| \sqrt{20} \|}$

16. $\cos\alpha = \dfrac{-1}{\| \sqrt{3} \|}$, $\cos\beta = \dfrac{-1}{\| \sqrt{3} \|}$, $\cos\gamma = \dfrac{-1}{\| \sqrt{3} \|}$

17. $\cos\alpha = \dfrac{2}{\| \sqrt{20} \|}$, $\cos\beta = \dfrac{-4}{\| \sqrt{20} \|}$, $\cos\gamma = \dfrac{0}{\| \sqrt{20} \|} = 0$

18. $\cos\alpha = \dfrac{2}{\| \sqrt{29} \|}$, $\cos\beta = \dfrac{-4}{\| \sqrt{29} \|}$, $\cos\gamma = \dfrac{3}{\| \sqrt{29} \|}$

19. 증명 생략

20. 증명 생략

21. 증명 생략

22. 증명 생략

23. 증명 생략

[Section 5.3 연습문제]

1. $x\times y=-2i-9j-3k$

2. $y\times x=2i+9j+3k$

3. $x\times(y\times z)=6i+9j+13k$

4. $(x\times y)\times z=-12i+j+5k$

5. $x\times y=i-4j-7k$

6. $x\times y=-6i+6j-6k$

7. $x\times y=-18i-36j+18k$

8. $x\times y=-2i+6j-2k$

9. $\|x\times y\|=\sqrt{59}$

10. $\|x\times y\|=\sqrt{234}$

11. $\|x\times y\|=0$

12. $\|x\times y\|=\sqrt{101}$

13. $\frac{\sqrt{699}}{2}$

14. $\frac{\sqrt{56}}{2}$

15. 13번에서 $\overrightarrow{PS}=(-3,\ -1,\ 5)$이므로 평행육면체의 부피는 $\left|\begin{vmatrix}-1 & 2 & 5\\-4 & 0 & 6\\-3 & -1 & 5\end{vmatrix}\right|=18$이다.

14번에서 $\overrightarrow{PS}=(-1,\ -1,\ 3)$이므로 평행육면체의 부피는 $\left|\begin{vmatrix}2 & 0 & -4\\3 & 1 & -3\\-1 & -1 & 3\end{vmatrix}\right|=8$이다.

16. 증명 생략
17. 증명 생략
18. 증명 생략
19. 증명 생략
20. 증명 생략
21. 증명 생략
22. 증명 생략
23. 증명 생략

[Section 5.4 연습문제]

1. $\dfrac{\mathrm{x}}{\| \mathrm{x} \|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,\ 0,\ 1,\ -1)$

2. $\dfrac{\mathrm{y}}{\| \mathrm{y} \|} = \dfrac{1}{\sqrt{163}}(9,\ -3,\ -6,\ 1,\ -6)$

3. $\dfrac{\mathrm{z}}{\| \mathrm{z} \|} = \dfrac{1}{\sqrt{55}}(1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5)$

4. $\dfrac{\mathrm{w}}{\| \mathrm{w} \|} = \dfrac{1}{\sqrt{11}}(-2,\ 0,\ 1,\ 1,\ -1,\ 2)$

5. $\mathrm{x} \cdot y = 4$

6. $\mathrm{x} \cdot y = 4$

7. $\mathrm{x} \cdot y = 0$

8. $\mathrm{x} \cdot y = \dfrac{5}{2}$

9. 증명 생략

10. 증명 생략

11. 증명 생략

12. 증명 생략\

13. 증명 생략

14. 증명 생략

15. $a = 1,\ 5$

[Section 5.5 연습문제]

1. $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-3}{-2}$

2. $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$

3. $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1},\ z=-2$

4. $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{5}$

5. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-7}$

6. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-7}{-7}=\frac{z+2}{3}$

7. a$=(5,\ -3,\ 2)$

8. a$=(-2,\ 3,\ 5)$

9. $2x-3y+z+6=0$

10. $y=0$

11. $x+y+z-2=0$

12. $7x+39y+17z-195=0$

13. n$=(1,\ -3,\ 5)$

14. n$=(3,\ 5,\ -6)$

15. $\dfrac{13x-9}{7}=\dfrac{13y-20}{-22}=\dfrac{z}{1}$

16. 점 P에서 직선에 이르는 거리

$\| \overrightarrow{QR} \| = \sqrt{4^2+1^2+10^2}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$, $D=\dfrac{1}{\| \overrightarrow{QR} \|} \| \overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{QP} \| = \dfrac{3\sqrt{77}}{3\sqrt{13}}=\sqrt{\dfrac{77}{13}}$

한편, 점 P으로부터 직선에 가장 가까운 점

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{95}{39},\ \frac{131}{39},\ -\frac{185}{39}\right)$$

17. 점 P에서 직선에 이르는 거리

$$\| \overrightarrow{QR} \| = \sqrt{(-1)^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{21},\ D=\frac{1}{\| \overrightarrow{QR} \|} \| \overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{QP} \| = \frac{11\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$$

한편, 점 P으로부터 직선에 가장 가까운 점

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{142}{21},\ \frac{22}{21},\ \frac{31}{21}\right)$$

18. 주어진 점과 평면 사이의 거리는

$$D=\frac{|2\cdot 1+1\cdot 0+(-3)\cdot(-2)+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{9}{\sqrt{14}}$$

19. 주어진 점과 평면 사이의 거리는

$$D=\frac{|(-1)\cdot 1+(-6)\cdot 0+3\cdot(-2)+5|}{\sqrt{(-1)^2+(-6)^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{46}}\quad -x-6y+3z=-5$$

20. 세 점은 동일한 직선 위에 있지 않다.

21. $2x-3y+5z-23=0$

22. $2x+y+z-3=0$

6장 연습문제 답안

[Section 6.1 연습문제]

1. 벡터공간이 아니다.
2. 벡터공간이다.
3. 벡터공간이 아니다.
4. 벡터공간이 아니다.
5. 벡터공간이 아니다.

6. 부분공간임
7. 원점을 지나지 않으므로 부분공간이 아님
8. 부분공간임
9. 원점을 지나지 않으므로 부분공간이 아님

10. 부분공간임
11. 부분공간임
12. 부분공간이 아님

13. 부분공간이다.
14. 부분공간이 아니다.
15. 부분공간이 아니다.
16. 부분공간이다.

17. 부분공간이 아니다.

18. 부분공간이 아니다.

19. 증명 생략

20. 증명 생략

21. 증명 생략
22. 증명 생략
23. 증명 생략
24. 증명 생략

[Section 6.2 연습문제]

1. $a=4,\ b=-2,\ c=3$

2. $a=1,\ b=5$

3. 일차독립이다.

4. 일차독립이다.

5. $k=1/2,\ -1$

6. 증명 생략

7. 증명 생략

8. 증명 생략

9. 증명 생략

10. 증명 생략

11. 증명 생략

12. 증명 생략

[Section 6.3 연습문제]

1. 일차독립이고 기저이다.
2. 일차종속이다. 기저가 아니다.

3. 기저가 되기 위해서는 적어도 벡터가 세 개가 필요하므로 S는 기저가 될 수 없다.
4. S는 일차독립이므로 S는 기저이다.
5. S는 일차독립이므로 S는 기저이다.
6. S가 일차종속이므로 기저가 될 수 없다.

7. S는 4개의 벡터를 가지므로 일차종속이다. 그래서 기저가 아니다.

$$(1,2,3)=(1,0,0)+(0,2,0)+(0,0,3)$$

8. 기저는 $\{(1,0,-1), t(0,1,-1)\}$이고 $\dim W=2$이다.
9. 기저는 $\{(2,0,1), t(0,1,0)\}$이고 $\dim W=2$이다.
10. 기저는 $\{(1,2,3)\}$이고 $\dim W=1$이다.
11. 기저는 $\{(1,-2,4)\}$이고 $\dim W=1$이다.

12. $a \neq -1,0,1$인 모든 실수값

13. 두 벡터 (1,0,1,0)과 (0,1,-1,0)는 일차독립이므로 표준단위벡터 $(1,0,0,0)$, $(0,0,0,1)$를 추가하면 $\mathbb{R}^4$의 기저가 된다.

14. 증명 생략

15. $\mathbb{R}^n$의 모든 부분공간은 항상 벡터공간이다.

16. 증명 생략

[Section 6.4 연습문제]

1. 행공간의 기저는 $\{(1,0),(0,1)\}$이므로 차원은 2이다.
2. 행공간의 기저는 $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$이므로 차원은 3이다.
3. 행공간의 기저는 $\{(1,0,0,2),(0,1,0,20),(0,0,1,6)\}$이므로 차원은 3이다.
4. 행공간의 기저는 $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$이므로 차원은 4이다.
5. 행공간의 기저는 $\{(1,0,0,1,2),(0,1,0,-1,-1),(0,0,1,-1,-2)\}$이므로 차원은 3이다.
6. 행공간의 기저는 $\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,-1),(0,0,0,1,0)\}$이므로 차원은 4이다.

7. 행공간의 기저 $\{(1,0,1),(0,0,1)\}$, 열공간의 기저 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

8. 행공간의 기저 $\{(1,0,1),(0,1,2),(0,0,1)\}$, 열공간의 기저 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$

9. 행공간의 기저 $\{(1,3,2,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$, 열공간의 기저 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

10. 행공간의 기저 $\{(1,2,3,4),(0,1,3,0),(0,0,1,2),(0,0,0,1)\}$,

열공간의 기저 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\3\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\0\\2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

11. 해공간의 기저는 $(3,-2,1)$이고 차원은 1이다.
12. 해공간의 기저는 $(-3,1,1,0),(2,-2,0,1)$이고 차원은 2이다.

13. 해공간의 기저는 ϕ이고 nullity(A)은 0이다.
14. 해공간의 기저는 ϕ이고 nullity(A)은 0이다.
15. 해공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-4\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$이고 nullity$(A)$은 2이다.
16. 해공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$이고 nullity$(A)$은 2이다.
17. $k=4$

18. 증명 생략

19. 계수는 1이 될 수 없다. 계수가 2가 되기 위해서는 $x = 2, y = 1$이 되어야 한다.

20.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$의 계수는 2이고 퇴화차수는 1이다.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$의 계수는 2이고 퇴화차수는 2이다.

(3) 계수는 2이고 퇴화차수는 $n-2$이다.

21. 증명 생략

22. 증명 생략

23. 증명 생략

24. 증명 생략

[Section 6.5 연습문제]

1. $[\mathrm{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

2. $[\mathrm{x}]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. $[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

4. $[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

5. $[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

6. $[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

7. $[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{10}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

8. $[\mathrm{x}]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

9. $(5,-3) = a(2,1) + b(3,-4) \Rightarrow [\mathrm{x}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(3,-5) = a(2,1) + b(3,-4) \Rightarrow [\mathrm{x}]_T = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} \\ \frac{13}{11} \end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} \\ \frac{13}{11} \end{bmatrix}$

10. $P = [I]_{T,S} = [S]^{-1}[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

11. $(5,-3) = a(1,0) + b(0,1) \Rightarrow [\mathrm{x}]_T = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

$(3,-5)=a(1,0)+b(0,1) \Rightarrow [\mathrm{y}]_T=\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

12. $Q=P^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1}=-\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

13. $(5,4)=a(1,1)+b(2,3) \Rightarrow [\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

$(1,5)=a(1,1)+b(2,3) \Rightarrow [\mathrm{y}]_T=\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_T=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

14. $P=[I]_{T,S}=[S]^{-1}[T]=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

15. $(5,4)=a(0,1)+b(1,2) \Rightarrow [\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}$

$(1,5)=a(0,1)+b(1,2) \Rightarrow [\mathrm{y}]_S=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, 또는 $[\mathrm{x}]_S=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

16. $Q=[I]_{S,T}=[T]^{-1}[S]=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

17. $P_{S_1 \to S_3}=[S_3]^{-1}[S_1]=[S_3]^{-1}[S_2][S_2]^{-1}[S_1]=P_{S_2 \to S_3}P_{S_1 \to S_2}=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 31 & 11 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

18. $S=\{(1,1,0),\ (1,0,2),\ (0,2,1)\}$

19. $S=\left\{(\frac{4}{5},\frac{1}{5},-\frac{2}{5}),\ (\frac{1}{5},-\frac{1}{5},\frac{2}{5}),\ (-\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5})\right\}$

20. 증명 생략

21. 증명 생략

[Section 6.6 연습문제]

1. 두 벡터는 직교이다.
2. 두 벡터는 직교가 아니다.
3. 두 벡터는 직교가 아니다.
4. 두 벡터는 직교이다.

5. 수직인 단위벡터는 $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,-2)$이다.

6.정규직교집합이다.
7. 정규직교집합이다.

8. $a=b=\pm\frac{1}{2}$

9. 증명 생략

10. $\mathrm{x}_4=(-t,t,0,t)=t(-1,1,0,1)$이다.

11. **10**번에서 구한 벡터는 서로 수직이므로 각 벡터의 크기만 나누어 주면 정규직교벡터가 된다.

$$\left\{\mathrm{y}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}, \mathrm{y}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}, \mathrm{y}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathrm{y}_4=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

12. $\left\{(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),\ (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\right\}$

13. $\mathrm{y}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}}\\ \frac{3}{\sqrt{13}}\end{bmatrix},\quad \mathrm{y}_2=\begin{bmatrix}\frac{-3}{\sqrt{13}}\\ \frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}$

14. $T=\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}\right\}$

15. $T=\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\right\}$

16. $\mathrm{y}_2 = \frac{\mathrm{z}_2}{\|\mathrm{z}_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

17. 증명 생략

[Section 6.7 연습문제]

1. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$

7. $x_1 = 1/2,\ x_2 = 5/2,\ x_3 = -2$

8. 증명 생략

9. 증명 생략

10. $A = Q$ 이므로 $A = QI_n$

7장 연습문제 답안

[Section 7.1 연습문제]

1. 선형변환

2. 선형변환 아님: $L(kx) = (1, kx) \neq kL(x)$

3. 선형변환 아님: $L(kx, ky, kz) = (2kx - ky,\ k^2 yz) \neq kL(x,y,z)$

4. 선형변환 아님:$L(kx,\ ky) = k^2 xy \neq kL(x,y)$

5. 선형변환

6. 선형변환

7. 선형변환 아님: $L(kx,\ ky) = (kx,\ \tan ky) \neq kL(x,y)$

8. 선형변환 아님: $L(kx,\ ky) = (0,\ k^2 xy) \neq kL(x,y)$

9. 선형변환 아님: $L(-x, -y, -z) = (|x|,\ 0) \neq -L(x,y,z)$

10. 선형변환

11. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

15. $L(2,3,4) = (21, -11)$

16. $L(1,2,3) = (14, -5)$

17. $L(1,-2,3) = (2,15)$

18. $L(1,1,-1) = (3,-12)$

19. $L(x,y,z) = (2x + 3y + 2z,\ -4x - 5y = 3z)$

20. $L(3\mathrm{x}_1 - 2\mathrm{x}_2 + 4\mathrm{x}_3) = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$

21. 증명 생략

22. 증명 생략

23. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

[Section 7.2 연습문제]

1. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} \cos(2\tan^{-1}a) & \sin(2\tan^{-1}a) \\ \sin(2\tan^{-1}a) & -\cos(2\tan^{-1}a) \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

7. $\triangle ABC$의 넓이=6

8.

9. 24

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3x+6y \end{bmatrix}$ 이므로 $3(x+2y) = 3x+6y$

11. 회전변환은 도형의 크기를 변화시키지 않으므로 넓이가 변하지 않는다.

12. $5x - 3y + 1 = 0$

13. y-축 층밀림, y-축 확대, y-축 대칭, x-축 층밀림

14. $(\frac{3+\sqrt{3}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4})$

15. $\begin{bmatrix} \dfrac{3}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{3}{4} \end{bmatrix}$

16. $(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2})$

17. 증명 생략

[Section 7.3 연습문제]

1. 예 2. 아니오 3. 예 4. 아니오

5. $\ker L = \{(x,y) | x = 0\}$ 6. $\mathrm{ImL} = \{(x,0) | x \in R\}$

7. 예 8. 아니오 9. 예 10. 아니오

11. $\ker L = \{(x,y) | y = 0\}$ 12. $\mathrm{ImL} = \{(0,y) | y \in R\}$

13. 아니오 14. 예 15. 예 16. 아니오

17. $\ker L = \{t(-2,1) | t \in R\}$ 18. $\mathrm{ImL} = \{t(1,2) | t \in R\}$

19. 단사 20. $\mathrm{rank(L)} = 3$

21. $\mathrm{rank(L)} = 2$ 22. $\mathrm{nullity(L)} = 0$

23. 증명 생략

24. 증명 생략

25. 증명 생략

26. $(1,1)$은 ImL에 들어 있지 않다.

27. A

[Section 7.4 연습문제]

1. 직교행렬

2. 직교행렬

3. $T(\mathrm{x}) \cdot T(\mathrm{y}) = -2$

4. $\|T(\mathrm{x})\| = \sqrt{38}$, $\|T(\mathrm{y})\| = \sqrt{19}$

5. $\det\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = 1$

6. $\det\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = 1$

7. $a = 0, b = -\frac{2}{\sqrt{6}}, c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

8. $2a^2 + 2b^2 = 1$

9. $\frac{1}{2}$

10. 증명 생략

11. $R_\theta,\ \theta = -\frac{\pi}{6}$

12. $R_\theta,\ \theta = \frac{\pi}{4}$

13. $H_{\frac{\theta}{2}},\ \theta = \frac{\pi}{8}$

14. $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

16. A가 직교행렬이므로 각을 보존한다. 그러므로 사잇각은 $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{26}}$

[Section 7.5 연습문제]

1. $AB = \begin{bmatrix} -8 & -3 & 1 \\ -5 & -15 & -8 \\ 44 & -11 & 45 \end{bmatrix}$

2. $BA = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 21 \\ 10 & -8 & 4 \\ 45 & 3 & 25 \end{bmatrix}$

3. $T(L(x,\ y)) = (3x+3y, 6x-2y)$, $L(T(x,\ y)) = (5x+4y, x-4y)$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\mathbb{R}^2$에서 x축에 대칭인 선형변환

9. $\mathbb{R}^2$에서 y축에 대칭인 선형변환

10. $\mathbb{R}^2$에서 $k = 1/3$ 축약인 선형변환

11. $\mathbb{R}^2$에서 $k = 2$ 늘림인 선형변환

12. $\begin{cases} w_1 = -x_1 + 2x_2 \\ w_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} w_1 = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ w_2 = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ w_3 = -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \end{cases}$

14. $L \circ T = T \circ L$

15. 다음 선형변환에 의한 단위 정사각형의 이미지를 좌표평면 위에 그려라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

16. 증명 생략

17. 증명 생략

[Section 7.6 연습문제]

1. $[L]_S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $[L]_T = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} & -\frac{56}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$

2. $[L]_S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $[L]_T = \begin{bmatrix} -\frac{4}{11} & -\frac{49}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{18}{11} \end{bmatrix}$

3. $[L]_S = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $[L]_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

4. $[L]_S = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $[L]_T = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $[L]_S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $[L]_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $[L]_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $[L]_T = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

7. $P^{-1}AP = B$

8. $P^{-1}AP = Q^{-1}BQ$ 인 P, Q가 존재하므로 닮음이다.

9. 임의의 양의 정수 k 에 대하여 A^k 는 $B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$이므로 닮은 행렬이다.

10. $B^T = (P^{-1}AP)^T = P^TA^T(P^T)^{-1} = Q^{-1}A^TQ$

11. $P^{-1}AP = B$이므로 $B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$이다. 그러므로 A^{-1}와 B^{-1}는 닮음행렬이다.

12. 가역행렬 A, B에 대하여 AB와 BA는 닮음행렬이다.

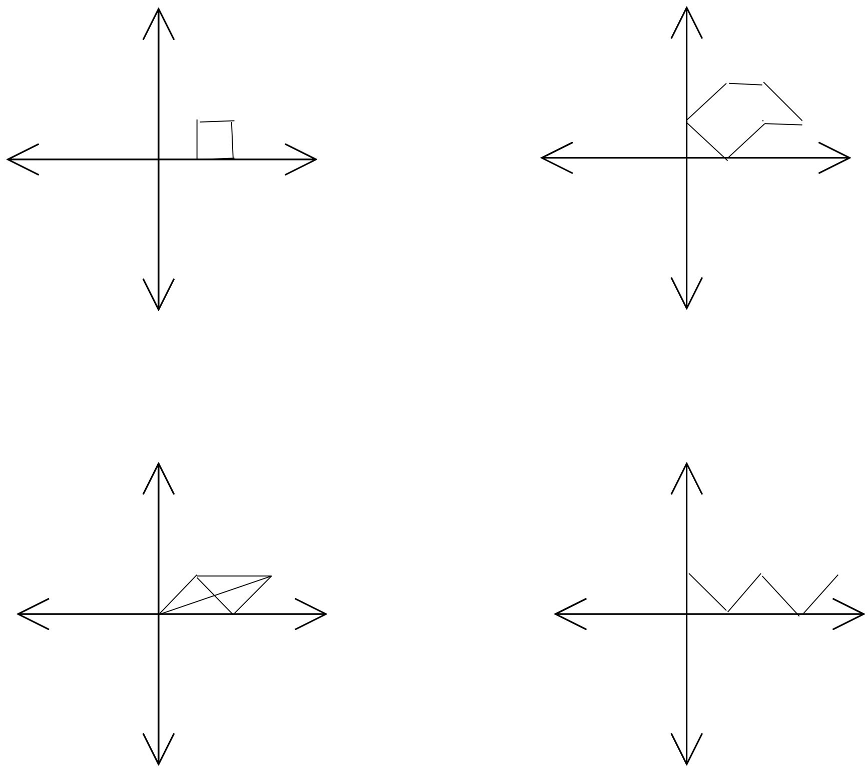
13. A와 B가 $A^n = 0, B^n = 0$인 멱영원이라면 A 와 B는 닮음행렬이다.

14. 증명 생략

15. 증명 생략

[Section 7.7 연습문제]

1~4.



5. $V=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$

6. $V=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$

7. $V=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&1\\1&0&0&1&1\end{bmatrix}$

8. $V=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&1\\1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&1&0&1&1&1\\1&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

8장 연습문제 답안

[Section 8.1 연습문제]

1. $\lambda^2 - 4\lambda + 3$

2. $\lambda^2 + \lambda - 6$

3. $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 11\lambda - 19$

4. $\lambda^3 - 6\lambda^2$

5. $\lambda = 1$

6. $\lambda = 0$

7. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -1$

8. $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$

9. $\lambda = 4$(다른 두 고유값은 복소수)

10. $\lambda = 3$

11. 주어진 행렬의 고유값은 $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$.

$\lambda_1 = 2$에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x}_1 = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\ (s \neq 0)$,

$\lambda_2 = 3$에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x}_2 = t\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\ (t \neq 0)$

고유값 $\lambda_1 = 2$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

고유값 $\lambda_2 = 3$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

12. 주어진 행렬의 고유값은 $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3 + \sqrt{2},\ \lambda_3 = 3 - \sqrt{2}$

$\lambda_1 = -1$에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x}_1 = r\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ (r \neq 0)$

$\lambda_2 = 3 + \sqrt{2}$에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x}_2 = s\begin{bmatrix} \dfrac{3\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}+1} \\ \dfrac{\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}+1} \\ 1 \end{bmatrix}\ (s \neq 0)$

$\lambda_3 = 3-\sqrt{2}$ 에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x}_3 = t\begin{bmatrix} \dfrac{3\sqrt{2}-5}{2\sqrt{2}-1} \\ \dfrac{\sqrt{2}-4}{2\sqrt{2}-1} \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$

고유값 $\lambda_1 =-1$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

고유값 $\lambda_2 = 3+\sqrt{2}$ 에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{3\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}+1} \\ \dfrac{\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}+1} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

고유값 $\lambda_3 = 3-\sqrt{2}$ 에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{3\sqrt{2}-5}{2\sqrt{2}-1} \\ \dfrac{\sqrt{2}-4}{2\sqrt{2}-1} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

13. 주어진 행렬의 고유값은 $\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 =-1,\ \lambda_4 =-2$

$\lambda_{1,2} = 1$에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x}_{1,2} = r\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(r,\ s \neq 0)$

$\lambda_3 =-1$에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x}_3 = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$

$\lambda_4 =-2$에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x}_4 = w\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(w \neq 0)$

고유값 $\lambda_{1,2} = 1$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

고유값 $\lambda_3 =-1$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

고유값 $\lambda_4 =-2$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

14. 주어진 행렬의 고유값은 $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$

$\lambda_1 = 1$에 대응하는 고유벡터는 $\mathrm{x}_1 = s\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(s \neq 0)$

$\lambda_2 = 2$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_2 = t\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$

고유값 $\lambda_1 = 1$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}3\\-3\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

고유값 $\lambda_2 = 2$에 대응하는 고유공간의 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

15. 주어진 대각행렬의 고유값은 $d_1,\ d_2,\ \cdots, d_n$이다.

16. 주어진 행렬의 특성방정식은 $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 5$,

$P_A(A) = A^3 - 3A^2 + 5A - 5I_3 = 0$임을 알 수 있다.

17. $P_A(A) = A^3 - 3A^2 + 5A - 5I_3 = 0$이므로 $A^3 = 3A^2 - 5A + 5I_3$이다. 이 식의 양변에 A^2을 곱한 후 정리하면 $A^5 = \begin{bmatrix}16 & 1 & 4\\-1 & 14 & 6\\2 & -3 & 13\end{bmatrix}$이다. 한편 $A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\-\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\\\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$이다.

18. 증명 생략

19. 증명 생략

20. 증명 생략

21. 증명 생략

22. 증명 생략

[Section 8.2 연습문제]

1. 고유값은 $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$이고, 이 고유값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 $P = [\mathrm{x}_1 \ \ \mathrm{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

2. 고유값은 $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3$이고, 이 고유값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 $P = [\mathrm{x}_1 \ \ \mathrm{x}_2] = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

3. 고유값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$이고, 이 고유값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 $P = [\mathrm{x}_1 \ \ \mathrm{x}_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = D$$

4. 고유값은 실수범위에서 구할 수 없다. 따라서 이 행렬은 대각화 가능하지 않다.

5. 고유값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$이고, 이 고유값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 $P = [\mathrm{x}_1 \ \ \mathrm{x}_2 \ \ \mathrm{x}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=D$$

6. 고유값은 실수범위에서는 구할 수 없다. 따라서 이 행렬은 대각화 할 수 없다.

7. 고유값은 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$이고, 이 고유값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$

이고 일차독립이므로 $P=[\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2\ \ \mathrm{x}_3]=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=D$$

8. 고유값은 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2$이고, 이 고유값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 $P=[\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2\ \ \mathrm{x}_3]=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=D$$

9. 고유값은 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$이고, 이 고유값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{x}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 $P=[\mathrm{x}_1\ \ \mathrm{x}_2\ \ \mathrm{x}_3\ \ \mathrm{x}_4]=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$

이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&-1&0\\1&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2&0\\0&1&-2&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=D$$

10. 고유값은 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$이고, 이 고유값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$이고 일차독립이므로 $P = [\mathrm{x}_1 \ \mathrm{x}_2 \ \mathrm{x}_3 \ \mathrm{x}_4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$이다. 따라서 A는 대각화 가능하고

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = D$$

11. 증명 생략

12. 증명 생략

13. 증명 생략

14. 증명 생략

15. 증명 생략

16. 주어진 행렬의 특성방정식은 $x^3 - 3x + 2 = 0$이므로 고유값은 1과 -2이다. 이때 1이 중근이므로 고유값 1의 대수적 중복도는 2이고 고유값 2의 대수적 중복도는 1이다.

17. 주어진 행렬의 특성방정식은 $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = 0$이므로 고유값은 -1과 3이다. 이때 -1과 3은 중근이므로 두 고유값의 대수적 중복도는 2이다.

18. 문제 오류 – 삭제 바람

19. 증명 생략

20. 증명 생략

21. 증명 생략

[Section 8.3 연습문제]

1. 고유값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$이고, 이 고유값에 대응하는 고유벡터는 각각 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이다. 따라서 고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유공간의 차원은 1이고, 고유값 $\lambda_2 = 2$에 대응하는 고유공간의 차원은 1이다.

2. 고유값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 6$이고, 고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$이므로 고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유공간의 차원은 1이다. 고유값 $\lambda_2 = 6$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이므로 고유값 $\lambda_2 = 6$에 대응하는 고유공간의 차원은 2이다.

3. 고유값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3$이고, 고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$이므로 고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유공간의 차원은 2이다. 고유값 $\lambda_2 = 3$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이므로 고유값 $\lambda_2 = 3$에 대응하는 고유공간의 차원은 1이다.

4. 고유값은 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 8$이고, 고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$이므로 고유값 $\lambda_1 = 0$에 대응하는 고유공간의 차원은 3이다. 고유값 $\lambda_2 = 8$에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$이므로 고유값 $\lambda_2 = 8$에 대응하는 고유공간의 차원은 1이다.

5. 전치행렬과 역행렬이 같다. 따라서 이 행렬은 직교행렬이다.

6. 전치행렬과 역행렬이 같다. 따라서 이 행렬은 직교행렬이다.

7. 역행렬은 전치행렬과 같으므로 $A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$이다.

8. $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

9. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

10. $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

11. $P = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

12. $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$

13. 증명 생략

14. 증명 생략

15. 증명 생략

16. 증명 생략

17. 증명 생략

18. 증명 생략

[Section 8.4 연습문제]

1. $A^5 = \begin{bmatrix} 65 & -66 \\ 33 & -34 \end{bmatrix}$

2. $A^5 = \begin{bmatrix} 94 & -93 \\ 62 & -61 \end{bmatrix}$

3. $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -62 & 31 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -62 & 32 \end{bmatrix}$

4. $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -93 & 31 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$

5. $A^n = \begin{bmatrix} \dfrac{(-4)^n + 4^n}{2} & -(-4)^n + 4^n \\ \dfrac{-(-4)^n + 4^n}{4} & \dfrac{(-4)^n + 4^n}{2} \end{bmatrix}$

6. 증명 생략

7. 초기 인구분포에는 상관없이 오랜 기간 후에는 전 인구의 $\frac{1}{2}$는 도시에 $\frac{1}{2}$은 시골에 거주하게 된다.

8. 초기 인구분포에는 상관없이 오랜 기간 후에는 전 인구의 $\frac{1}{2}$는 도시에 $\frac{1}{2}$은 시골에 거주하게 된다.

9. k 년 후의 호랑이의 수는 전년도 수의 50%와 전년도 산토끼의 수의 30%를 더한 것과 같고, k 년 후의 산토끼의 수는 전년도 수의 130%에서 호랑이에게 잡혀 먹힌 수를 뺀 것과 같다. 따라서 k 년 후의 호랑이와 산토끼의 수를 각각 T_k, H_k라고 하몬

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} T_k \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5T_{k-1} + 0.3H_{k-1} \\ -cT_{k-1} + 1.3H_{k-1} \end{bmatrix}$$

이고, $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ -c & 1.3 \end{bmatrix}$의 고유값은 $\lambda = \dfrac{9 \pm \sqrt{16 - 30c}}{10}$이다. 포획률을 $c = 0.5$라고 하면

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0.8$이고 이에 대응하는 고유벡터는 각각

$$\mathrm{v}_1 = s\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathrm{v}_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathrm{R})$$

따라서

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.8)^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{x}_k = A^k \mathrm{x}_0 \approx \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_0 \\ H_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}H_0 - \frac{3}{2}T_0 \\ \frac{5}{2}H_0 - \frac{5}{2}T_0 \end{bmatrix}$$

여기서 $\alpha = \frac{3}{2}H_0 - \frac{3}{2}T_0$라 하면

$$\mathrm{x}_k = \begin{bmatrix} T_k \\ H_k \end{bmatrix} \approx \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

그러므로 최초의 마리수와는 상관없이 안정적인 상태가 된다.
한편 포획률이 $c = 0.4$일 때, 위와 같은 방법으로 A^k를 계산하면

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{11}{10}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{7}{10}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{11}{10}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{11}{10}\right)^k \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

k 가 충분히 커지면

$$\mathrm{x}_k \approx \left(\frac{11}{10}\right)^k \begin{bmatrix} \frac{3}{4}H_0 - \frac{1}{2}T_0 \\ \frac{3}{2}H_0 - T_0 \end{bmatrix}$$

여기서 $\beta = \frac{3}{4}H_0 - \frac{1}{2}T_0$라 하면 $\mathrm{x}_k = \beta\left(\frac{11}{10}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$이다. 그러므로 매년 호랑이와 산토끼의 수는 증가하고 호랑이와 산토끼의 비율은 1 : 2 이다.

또한 포획률이 $c = 0.532$일 때도 마찬가지로 계산하면

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{15}{19} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{9.2}{10}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{8.8}{10}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{15}{19} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\approx \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{15}{19} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{15}{19} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

k 가 충분히 커지면

$$\mathrm{x}^k = \begin{bmatrix} T_k \\ H_k \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ H_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

그러므로 호랑이와 산토끼는 모두 멸종한다.
이상을 종합하면 포획률 c가 $c=0.5$일 때는 호랑이와 산토끼는 조화를 이루며 살아가고, $c<0.5$일 때는 호랑이와 산토끼의 수가 매년 증가하여 결국 인구폭발이 되며, $c>0.5$일 때는 호랑이와 산토끼는 모두 멸종한다.

10. $P=\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$ 에 대응하는 $(I-P)\mathbf{q}=\mathbf{0}$을 이용하면

$$\begin{pmatrix} 0.05 & -0.03 \\ -0.05 & 0.03 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.05q_1-0.03q_2 \\ -0.05q_1+0.03q_2 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

이다. $q_2=s$라 하면 $\mathbf{q}$는 확률벡터이므로 $q_1=\frac{3}{5}s$이고 $q_1+q_2=\frac{8s}{5}=1$이다. 따라서 $q_1=\frac{3}{8}$, $q_2=s=\frac{5}{8}$이다. 따라서 오랜 시간이 지난 후의 인구분포는 다음과 같다.

$$125000\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 46875 \\ 78125 \end{pmatrix}$$

11. $$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= P\mathbf{x}(t) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1e^{2t} \\ c_2e^{3t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1e^{2t}+\frac{3}{2}c_2e^{3t} \\ c_1e^{2t}+c_2e^{3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= P\mathbf{x}(t) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1e^{-t} \\ c_2e^{7t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}c_1e^{-t}+\frac{1}{2}c_2e^{7t} \\ c_1e^{-t}+c_2e^{7t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

13. $y_1(0)=4e^t-4e^{2t}$, $y_2(0)=4e^t-3e^{2t}$

14. $y_1(0)=0$
$y_2(0)=e^{3t}$
$y_3(0)=-e^{3t}$