

13장 연습문제

1.

(a) $(x^2, x^3) = \frac{1}{6}$

(b) $(x, x^5) = \frac{1}{7}$

(c) $(x, e^x) = 1$

(d) $(x^2, \sin x) = 2 \sin 1 + \cos 1 - 2$

3.

(a) $\|f_1\| = \frac{\pi^3 \sqrt{14\pi}}{7}$

(b) $\|f_2\| = \sqrt{\pi}$

(c) $\|f_3\| = \sqrt{\pi}$

(d) $\|f_4\| = \frac{\sqrt{3\pi}}{2}$

5.

$m \neq n$ 인 임의의 자연수 m, n 에 대하여 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx = 0,$

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx = 0$ 이다.

또한 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = 1, \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx = 1,$

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx = 1$ (n 은 자연수)이다.

따라서 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ 는 정규직교 집합이다.

7.

(a) 구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 $f(x)$ 의 푸리에 급수는

$$\frac{5}{6} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} (-1)^{n+1} \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\pi}{n} (-1)^n + \frac{2(1 - (-1)^n)}{n^3 \pi} \right\} \sin nx$$

이다.

(b) 구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 $g(x)$ 의 푸리에 급수는

$$1 + \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2 + 2n^2}{n^3} \right) (1 - (-1)^n) + \frac{\pi^2}{n} (-1)^n \right) \sin nx$$

이다.

9.

$$(a) \frac{2}{3\pi} - \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 9} \cos 2nx$$

$$(b) \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} (2 \cos \frac{n\pi}{2} + (-1)^{n+1} - 1) \cos nx$$